

**SOLUCIONARIO TERCERA PRÁCTICA
CALIFICADA CALCULO NUMERICO (MB-535)**

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

Sea el sistema de Ecuaciones No Lineales :

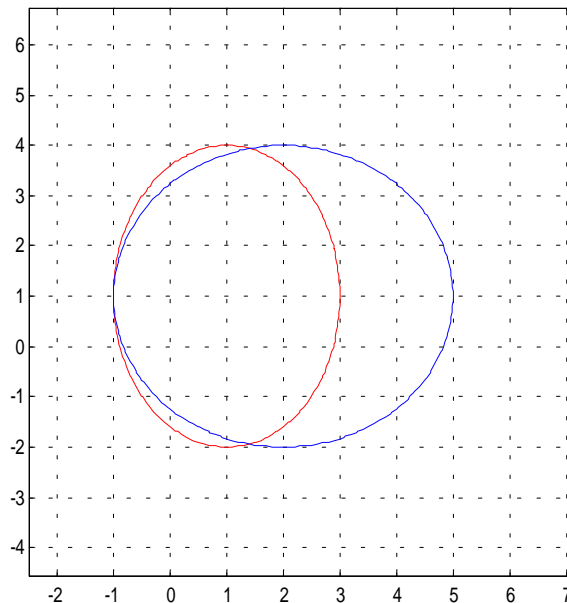
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

- Localice gráficamente las raíces e indique aproximaciones iniciales para cada una de ellas.
- Aproxime la raíz del primer cuadrante utilizando Newton-Rapshon para sistemas usando como aproximación inicial la obtenida en a). Haga 02 iteraciones.
- Cuál es la precisión de la aproximación obtenida en b)?

Solución

a)



Raíces aproximadas: (1.5,4), (1.5,-2), (-1,1)

b)

$$\begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} - 1 \quad f_{1x} = \frac{x-1}{2} \quad f_{1y} = \frac{2(y-1)}{9}$$

$$f_2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 9 \quad f_{2x} = 2(x-2) \quad f_{2y} = 2(y-1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

$$err = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

x	y	err
1.5	4	-----
1.40384615384615	3.94230769230769	0.11213369028549
1.40000614401573	3.93939289896347	0.00482096419166

c) Error estimados de 0.00482096419166

Problema 2

Disponemos de los siguientes datos sacados de un polinomio $p(x)$ de grado $g \leq 5$.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	1	1	1	7	25

- (a) ¿Podríamos averiguar de qué grado es?
 (b) Hallar $p(1/2)$ y obtener el error

Solución

a)Tabla de diferencias divididas

i	xi	F(xi)	F[,]	F[:,]	F[:,,]	F[:,,,:]	F[:,,,:,:]
0	-2	-5					
1	-1	1	6				
2	0	1	0	-3			
3	1	1	0	0	1		
4	2	7	0	3	1	0	
5	3	25	6	6	1	0	0

$$P(x) = -5 + 6(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x = x^3 - x + 5$$

Grado = 3

b)

$$f(1/2) \approx P(1/2) = 0.625$$

$$Error = 0$$

Problema 3

Sea la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$:

- Construya los polinomios cúbicos usando splines naturales en $x=0, 1, 2, 3$ y 4 .
- Aproxime $f(1.5)$ y obtener el error.
- Aproxime $f'(2.5)$ y obtener el error.

Solución

a)

i	x_i	$f(x_i)$	h_i	$F[x_i, x_{i+1}]$
0	0	0	1	1
1	1	1	1	-1
2	2	0	1	-1
3	3	-1	1	1
4	4	0		

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 & -0.5x^3 + 1.5x \\ 1 \leq x \leq 2 & 0.5(x-1)^3 - 1.5(x-1)^2 + 1 \\ 2 \leq x \leq 3 & 0.5(x-2)^3 - 1.5(x-2) \\ 3 \leq x \leq 4 & -0.5(x-3)^3 + 1.5(x-3)^2 - 1 \end{cases}$$

b)

$$S(1.5) = 0.5(1.5-1)^3 - 1.5(1.5-1)^2 + 1 = 0.6875$$

$$f(1.5) = 0.7071$$

$$err = 0.0196$$

c)

$$S'(2.5) = 1.5(2.5-2)^2 - 1.5 = -1.1250$$

$$f'(2.5) = -1.1107$$

$$err = 0.0143$$

Problema 4

a) Deduzca una fórmula de aproximación de la segunda derivada de la forma:

$$f''(x_i) \approx \left[\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \right]$$

Obtenida a partir del polinomio interpolante de Lagrange, que pasa por los puntos $\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ donde $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$

- Tabule $f(x) = e^{-x^2} \text{sen}(2x)$, en $x=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Utilice la fórmula deducida en (a) para hallar $f''(0.1)$.
- Determine el error cometido.

Solución

a) Polinomio interpolante de Lagrange:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1}) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1})$$

$$P_2''(x) = \frac{2}{(-h)(-2h)}f(x_{i-1}) + \frac{2}{(h)(-h)}f(x_i) + \frac{2}{(2h)(h)}f(x_{i+1})$$

$$f''(x_i) \approx P_2''(x_i) = \left[\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \right]$$

b)

$$f''(0.1) \approx \left[\frac{f(0.2) - 2f(0.1) + f(0)}{0.1^2} \right] \approx 0.39788248$$

c)

$$f''(0.1) = 0.39862778$$

$$error = 0.00074530$$

Los Profesores